УДК 004.02

АЛГОРИТМЫ ЦЕЛОЧИСЛЕННОЙ АРИФМЕТИКИ В ЗАДАЧАХ РАСЧЕТА ТРАЕКТОРНОГО ДВИЖЕНИЯ

М.В. Хачумов (*khmike@inbox.ru*)
Институт системного анализа РАН, Москва

Аннотация. В статье описаны целочисленные алгоритмы отработки прямолинейных движений и поворотов. Эта группа операций составляет основу обобщенного геометрического преобразования, связанного с управлением траекторным движением. За основу взят базовый алгоритм Брассини, который использует только целые числа и операции над ними.[1]

Ключевые слова: алгоритм Брассини, целочисленный алгоритм, поворот, управление, роботизированная система.

Введение

В задачах управления роботизированными системами, например, звеньями манипуляторов, бортовыми поворотными видеокамерами, перемещениями летательных аппаратов и др. возникает необходимость расчета положения и ориентации твердых тел в дискретные моменты времени. Передаваемые команды управления содержат код каждого из заранее определенных маневров, параметры указанного маневра, данные о моменте начала маневра и его окончании. Объекты совершают сложное пространственное движение, которое рассматривается как комбинация поступательного и вращательного движений некоторой точки или совокупности точек. Из-за ограничений на производительность бортовых вычислительных ресурсов малых подвижных автономных средств, возникают задачи быстрой отработки аффинных преобразований [Абрамов и др., 2014], [Абрамов и др., 2013] достаточно простыми средствами. Один из подходов к решению задачи расчета движений связан, например, с использованием алгоритмов семейства CORDIC [Хачумов, 2014], [Байков и др., 1986], позволяющих выполнять быстрые аффинные преобразования на аппаратном уровне. Здесь скорость обработки находится в прямой зависимости от разрядности операндов.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 14-07-31020 и 15-07-00925).

Недостатком подхода является необходимость нормализации результатов поворота путем масштабирования. В настоящей работе рассматривается альтернативный подход к реализации алгоритмов поворота связанный с использованием целочисленной арифметики. Среди множества алгоритмов, способных решить эту задачу можно особо выделить алгоритмы Брассини [Braccini, 1995], которые активно используются зарубежными исследователями и инженерами, например, для аппаратной реализации вращений [James, 1996] и ряда других приложений. Укажем на некоторые относительно новые работы этого направления. Так в статье [Eberly, 2008] изыскиваются пути рациональной реализации операции поворота, в том числе с приближением функций синуса и косинуса для набора углов рациональными числами. Отметим работу, представленную на сайте с открытыми кодами Leptonica [Rotation, 2011], в которой рассматривается алгоритм поворота на произвольный угол. В работе [Eberly, 2014] рассмотрено решение задачи и приведен псевдокод алгоритма преобразования системы координат с помощью операции поворота.

В настоящей работе рассматривается способ решения задачи плоского целочисленного поворота общего вида на основе базового алгоритма Брассини для генерации прямых линий.

1 Постановка задачи

Пусть движение материальной точки реализуется в следующей последовательности: поворот вокруг оси OZ на угол α, поворот вокруг оси OY на угол β, поворот вокруг оси OX на угол γ; перенос на величины $[x_t, y_t, z_t]$. После умножения исходного вектора положения объекта $[x \;\; y \;\; z \;\; 1]$, представленного в однородных координатах, на обобщенную матрицу преобразования получаем результирующий вектор $[X_R \;\; Y_R \;\; Z_R \;\; 1]$. С учетом выбранного порядка действий имеем следующую группу преобразований поворота:

$$
\begin{gathered}
Z_1 = y\sin(\gamma) + z\cos(\gamma),\; Y_1 = y\cos(\gamma) - z\sin(\gamma),\\
X_1 = Z_1\sin(\beta) + x\cos(\beta),\; Z_2 = Z_1\cos(\beta) - x\sin(\beta),\\
Y_2 = X_1\sin(\alpha) + Y_1\cos(\alpha),\; X_2 = X_1\cos(\alpha) - Y_1\sin(\alpha).
\end{gathered} \tag{1}
$$

Заключительная группа операций обобщенного геометрического преобразования связана со смещением объекта и имеет вид: $X_R = X_2 S_x + x_t$, $Y_R = Y_2 S_y + y_t$, $Z_R = Z_2 S_z + z_t$, причем $S_x = S_y = S_z = 1$. Известно, что кинематические уравнения, связывающие проекции $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ вектора абсолютной угловой скорости тела с углами поворота

ϕ_x, ϕ_y, ϕ_z (углы Эйлера-Крылова), определяющими угловое положение относительно базовой системы координат, имеют вид:

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_x = \dfrac{1}{\cos(\varphi_y)}(\omega_x \cos(\varphi_z) - \omega_y \sin(\varphi_z)); \\ \dot{\varphi}_y = \omega_x \sin(\varphi_z) + \omega_y \cos(\varphi_z); \\ \dot{\varphi}_z = \dfrac{1}{\cos(\varphi_y)}(\sin(\varphi_y)[\omega_y \sin(\varphi_z) - \omega_x \cos(\varphi_z)] + \omega_z \cos(\varphi_y)). \end{cases}$$

Система уравнений позволяет вычислять угловые скорости для последовательности поворотов объекта на углы $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ при известных оценках текущих значений $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ по информации специального измерителя. Вычисления на основе операций поворота целесообразно вести в следующей последовательности:

$$x = \omega_x \cos(\varphi_z) - \omega_y \sin(\varphi_z),\ \dot{\varphi}_y = \omega_x \sin(\varphi_z) + \omega_y \cos(\varphi_z),$$

$$z = -x \sin(\varphi_y) + \omega_z \cos(\varphi_y),\ \dot{\varphi}_x = \frac{x}{\cos(\varphi_y)},\ \dot{\varphi}_z = \frac{y}{\cos(\varphi_y)}.$$

Представляет практический интерес задача нацеливания видеокамеры, которая ставится следующим образом: по известным начальному направлению камеры $(\alpha 1, \beta 1)$ и координатам искомого объекта на плоскости изображения $(x2, y2)$, определить параметры управления камерой в виде двух углов поворота α, β, необходимых для перевода вектора наблюдения из начальной точки в конечную. Решение задачи требует выполнение двух операций поворота и содержится в работе [Абрамов и др., 2013].

Из рассмотренных задач видно, что операции поворота и смещения являются ключевыми в расчетах траекторного движения. Обобщенное преобразование применяется многократно и позволяет выполнять манипуляции над объектами. Повороты и смещения, как правило, осуществляются на малые величины, что обеспечивает необходимую плавность перемещения. Скорость выполнения подобных операций, связанных с вычислением тригонометрических функций в реальном времени для решения задач определения местоположения и ориентации должна соответствовать требованиям реального времени. Таким образом, ставится задача быстрого расчета и отработки движений в бортовых ЭВМ на основе целочисленных алгоритмов.

2 Алгоритм Брассини для генерации точек линии

Рассмотрим алгоритм, реализующий прямолинейное движение с использованием только целочисленных операндов. В соответствии с предложением работы [Braccini, 1995] точка с целыми координатами (X, Y) принадлежит прямой линии, выходящей из начала координат с коэффициентом наклона $K = (\Delta Y / \Delta X)$, если выполняется условие:

$$|Y - (\Delta Y / \Delta X \cdot X)| \leq \varepsilon ,$$

где $|\varepsilon| \leq 1/2$. Используя только целочисленные переменные $X, Y, \Delta X, \Delta Y$, получим следующее условие принадлежности точки искомой линии:

$$-\Delta X \leq 2\Delta Y \cdot X - 2\Delta X \cdot Y \leq \Delta X .$$

Тогда для возрастающей последовательности значений X, отличающихся на единицу, соответствующие значения Y можно найти на основе проверки выполнения приведенного соотношения.

Соответствующий целочисленный алгоритм генерации точек линии первой четверти приведен на рис. 1. Здесь k – количество выводимых точек.

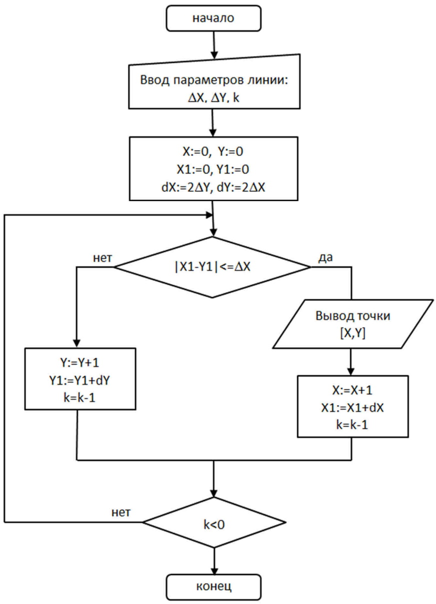

Рис. 1 – Целочисленный алгоритм генерации отрезка прямой линии

Применительно к задаче управления, алгоритм может быть использован для расчета трассы движения объекта под любым заданным углом в реальном масштабе времени.

3 Операция поворота на основе алгоритма Брассини

Без потери общности будем рассматривать задачу плоского поворота. Исходный объект (твердое тело) представляется в общем случае в виде матрицы элементов - системы физических точек, причем в простейшем случае имеем единственную точку (X,Y). Требуется выполнить поворот системы точек на заданный угол.

Предлагаемый алгоритм поворота основан на использовании модели Брассини [Braccini, 1995]. Новые координаты (X',Y') точки (X,Y) определяются следующим образом:

$$X' = (M/L)\cdot X + (N/L)\cdot Y,$$
$$Y' = -(N/L)\cdot X + (M/L)\cdot Y,$$

При выполнении преобразования поворота, в общем случае, угол поворота α задается тройкой (M,N,L) целых чисел, причем $L^2 = M^2 + N^2$, $M/L = \cos(\alpha)$, $N/L = \sin(\alpha)$. Таблица синусов и косинусов в виде отношений целых чисел вычисляется заранее и хранится в памяти системы управления поворотом.

Для последовательности значений координат X и Y, соответствующие значения X' и Y' можно найти на основе проверки выполнения соотношения:

$$|2LX' - 2MX - 2NY| \le L,$$
$$|2LY' + 2NX - 2MY| \le L.$$

Время выполнения алгоритма поворота оценивается, как $O(k)$, где k − число точек объекта.

Автором написана программа, реализующая целочисленный алгоритм выполнения геометрических преобразований над матрицей точек на плоскости и проведена серия экспериментов. Программа использует только операции алгебраического сложения, сдвига и сравнения целых чисел, что снижает требования к аппаратным средствам и может дать ускорение при микропрограммной реализации в бортовой ЭВМ. Описанный метод решения задач плоского прямолинейного движения и поворота может быть расширен для выполнения пространственных преобразований над трехмерными объектами.

Заключение

Решение траекторных задач требует расчета положения и ориентации подвижного объекта при задании управления в виде аффинной процедуры преобразования исходной системы координат. В настоящей работе рассмотрен алгоритм быстрого преобразования поворота на основе предложений Брассини для генерации линий. Алгоритм использует для своей реализации только целые числа и операции над ними, не опирается на прямое вычисление тригонометрических функций, что обеспечивает целесообразность его применения в системах управления камерой в мобильных подвижных системах при ограничениях на вычислительные ресурсы. Предполагается, что целочисленные алгоритмы лягут в основу полнофункциональных средств управления траекторным движением беспилотного летательного аппарата и наведения на заданную цель бортовых средств технического зрения. Кроме того, встраиваемое в бортовой вычислитель программное обеспечение обеспечит определение углов ориентации и параметров движения; навигацию и управление при полете по заданной траектории; стабилизацию углов ориентации в полете.

Список литературы

[Абрамов и др., 2014] Абрамов Н.С., Хачумов М.В. Моделирование управления бортовой видеокамерой беспилотного летательного аппарата // Авиакосмическое приборостроение, №3, 2014, с. 9-16

[Абрамов и др., 2013] Абрамов Н.С., Ромакин В.А. Методы управления поворотной видеокамерой // Известия Южного федерального университета. Технические науки, №7 (144), 2013, с. 173-179.

[Хачумов, 2014] Хачумов В.М. Программно-аппаратное управление поворотной видеокамерой летательного аппарата // Междисциплинарные исследования в области математического моделирования и информатики. Материалы 3-й научно-практической конференции. – Ульяновск: SIMJET, 2014, с. 413-419.

[Байков и др., 1986] Байков В.Д., Вашкевич С.Н. Решение траекторных задач в микропроцессорных системах ЧПУ. – Ленинград: Машиностроение, Ленинградское отделение, 1986.

[Braccini, 1995] Braccini C., Cocurullo F., Lavagetto F. A Fast Algorithm for High Quality Vector Quantization Codebook Design // Proceeding ICIAP '95 Proceedings of the 8th International Conference on Image Analysis and Processing – Springer-Verlag London, UK, 1995, ISBN: 3-540-60298-4, pp. 643-648.

[James, 1996] James T.C. Kaba, Jackson N. J. Method and apparatus for rotating and scaling images // United States Patent № 5,568,600, Oct. 22, 1996.

[Eberly, 2008] Eberly D. Integer-Based Rotations of Images. – Geometric Tools, LLC, 2008. – http://www.geometrictools.com/Documentation/IntegerBasedRotation.pdf.

[Rotation, 2011] Rotation. – http://www.leptonica.com/rotation.html.

[Eberly, 2014] Eberly D. Converting Between Coordinate Systems. – Geometric Tools, LLC, 2014.