

УДК 681.51

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РОБОТА С ПЕРЕМЕННЫМ ВЕКТОРОМ ТЯГИ

В.Е. Павловский (vlpavl@mail.ru)

Институт прикладной математики им. М.В.Келдыша  
Российской академии наук, МоскваС.Ф. Яцун, О.В.Емельянова, С.П.Стуканёва  
(teormeh@inbox.ru)ГОУ ВО "Юго-Западный государственный университет",  
Курск

**Аннотация.** В статье рассмотрены вопросы математического моделирования движения робота – трикоптера с учетом массогабаритных свойств трёх электроприводов, снабженных редуктором. Приведена расчетная схема и составлены дифференциальные уравнения на основе общих теорем динамики, которые описывают взаимосвязанные электрические и механические процессы в электромеханической системе приводов винтов трикоптера. Предложенные нелинейные дифференциальные уравнения решаются совместно с кинематическими соотношениями, выражающие проекции угловой скорости тела на оси связанной системы координат через угловые скорости углов крена, тангажа и рысканья.

**Ключевые слова:** математическая модель, трикоптер, уравнения движения.

### Введение

Одной из перспективных конструкций беспилотных летательных роботов являются аппараты с изменяемым вектором тяги, называемые конвертопланами.

По конструктивному исполнению различают конвертопланы: с поворотным винтом (тилтроторы), с поворотным крылом (тилтвинг) и с винтами в кольцевых каналах.

Преимуществом конструкции конвертоплана с поворотными винтами перед остальными являются скоростные характеристики, получаемые за счёт того, что в режимах максимальных скоростей во время

горизонтального полёта винты тилтротора повернуты перпендикулярно направлению движения аппарата.

Рассмотрим конвертоплан типа трикоптер (рис.1) - это летательный аппарат с тремя несущими винтами из которых два вращаются в противоположных направлениях как показано на рисунке, а третий, расположенный на поворотном узле, позволяет отклонять его вектор тяги от вертикали и таким образом управлять полётом. Благодаря обтекаемой форме крыла, в горизонтальном полёте возникает подъёмная сила, удерживающая трикоптер в воздухе и аппарат может зависать, перемещаться в стороны, вверх и вниз.

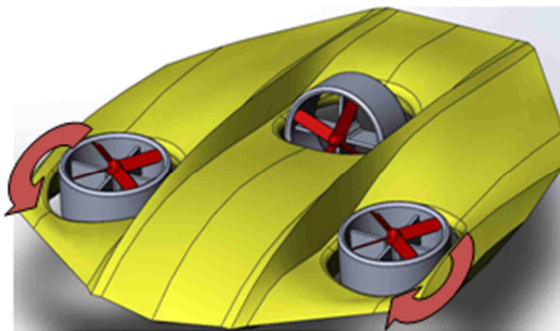


Рис.1. Общий вид трикоптера

Трикоптер является наиболее интересным аппаратом, поэтому разработка метода расчёта параметров системы управления на основе методов математического моделирования движения системы является актуальной.

## 1 Описание конструкции робота и принцип её действия

Трикоптер состоит из силового каркаса (рис. 2) на котором установлено основание 1, устройства вращения 2 и механизм поворота лопастей 3. На основании 1 закреплены блок питания, плата управления и приёмник сигнала, электрически связанные с приводами вращения лопастей 2 и 3.

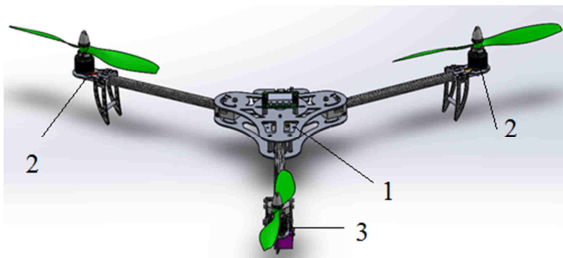


Рис.2. Общий вид силового каркаса трикоптера с изменяемым вектором тяги

## 1.1 Кинематика трикоптера

Рассмотрим основные координатные системы, используемые в работе для описания полета трикоптера (рис.3). Пусть положение центра масс трикоптера  $C$  совпадает с началом подвижной системы координат  $CX_1Y_1Z_1$ , связанной с корпусом коптера. В неподвижной декартовой системе координат положение центра масс коптера описывается координатами  $X, Y, Z$ .

Таким образом, матрица  $T_{10}$  получается путем перемножения трёх основных матриц вращения и имеет следующий вид [Павловский и др 2014а], [Павловский и др 1990, б]:

$$T_{10} = (\psi, \theta, \varphi) = R(Z_1, \psi)R(Y_1, \theta)R(X_1, \varphi) =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \theta & \cos \psi \sin \theta \sin \varphi - \cos \varphi \sin \psi & \sin \psi \sin \theta + \cos \psi \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \psi \cos \theta & \cos \psi \cos \varphi + \sin \psi \sin \theta \sin \varphi & \cos \varphi \sin \psi \sin \theta - \cos \psi \sin \varphi \\ -\sin \theta & \cos \theta \sin \varphi & \cos \varphi \cos \theta \end{bmatrix} \quad (1)$$

где  $\psi, \theta, \varphi$  - углы, определяющие ориентацию робота в пространстве.

Кинематические соотношения, выражающие проекции угловой скорости тела на оси связанной системы координат через угловые скорости указанных углов, могут быть представлены в виде [Павловский и др 2014а] :

$$\bar{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_{X1} \\ \omega_{Y1} \\ \omega_{Z1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\varphi} - \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\psi} \cos \theta \sin \varphi \\ \dot{\psi} \cos \varphi \cos \theta - \dot{\theta} \sin \varphi \end{bmatrix} \quad (2)$$

где  $\omega_{X1}, \omega_{Y1}, \omega_{Z1}$  – проекции угловой скорости тела на оси подвижной системы координат

Для изучения основных закономерностей движения трикоптера, особенностей системы управления, необходимо составить

математическую модель, описывающую пространственное движение летающего аппарата.

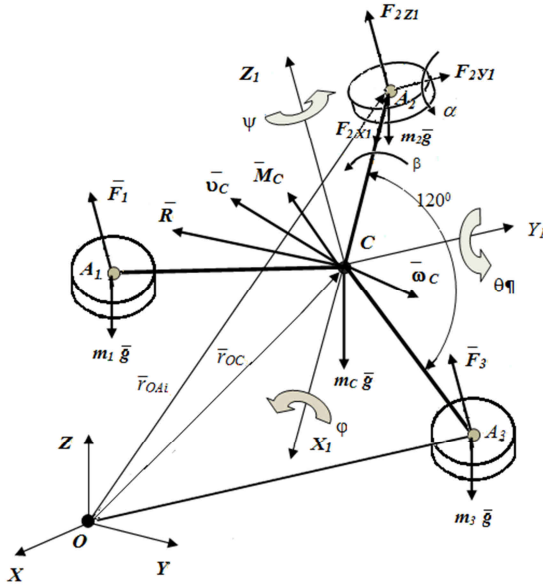


Рис.3. Расчетная схема трикоптера

## 2 Математическая модель трикоптера

Пусть трикоптер движется в неподвижной декартовой системе координат  $OXYZ$ , тогда  $CX_1Y_1Z_1$  – подвижные системы координат, проходящие через центр масс корпуса трикоптера  $C$  (рис.3).

В полёте на трикоптер действуют аэродинамические силы несущих винтов  $\vec{F}_i$ , приложенные к центрам масс роторов  $A_i$ , причем силы  $\vec{F}_i$  параллельны оси  $CZ_i$ . Силы тяжести корпуса  $m_C g$  и роторов винтов  $m_i g$  приложены в точках  $C$  и  $A_i$  соответственно (рис. 3),  $\alpha, \beta$  - углы вращения поворотного узла ротора [Jatsun и др 2014a], [Попов и др 2014].

Кроме внешних сил  $\vec{F}_i$  на трикоптер, действуют внешние моменты  $M_i$ , создаваемые силами  $\vec{F}_i$  несущих винтов, сила сопротивления движению корпуса в воздушной среде  $\vec{R}_C^{(0)} = R_C(\vec{v}_C^{(0)})$ , а также подъёмная сила корпуса, характеризующаяся моментом вращению корпуса  $\vec{M}_C = \mu_C(\vec{\omega}_C)$ .

Здесь  $\mu_C$  – эмпирический коэффициент сопротивления,  $v_C$  - скорость центра масс,  $\omega_C$  – угловая скорость вращения центра масс аппарата.

На основании общих теорем динамики, по методике, изложенной в работах [Яцун и др 2014б], [Попов и др 2014], [Павловский и др 1990, 6] получаем систему нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих изменение обобщенных координат трикоптера под действием внешних сил:

$$\begin{cases} \dot{v}_c^x = (\sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \varphi \sin \theta) \cdot (\sum F_i + R_x) / m \\ \dot{v}_c^y = (\cos \varphi \sin \psi \sin \theta - \cos \psi \sin \varphi) \cdot (\sum F_i + R_y) / m \\ \dot{v}_c^z = \cos \varphi \cos \theta \cdot (\sum F_i + R_z) / m - g \\ \dot{\omega}_{x_1} = \left[ ((F_1 + F_3) \cdot l_0 \cdot \sin 60^\circ) - \omega_{y_1} \omega_{z_1} (J_{i^{z_1}} - J_{i^{y_1}}) - \omega_{y_1} \sum J_{i^z} \omega_i + M_{x_1}^c \right] / J^{x_1} \\ \dot{\omega}_{y_1} = \left[ -(F_1 + F_3) \cdot \sin 30^\circ \cdot l_0 + F_{2z} \cdot l_0 \right] - \omega_{x_1} \omega_{z_1} (J^{x_1} - J_{i^{z_1}}) + \omega_{x_1} \sum J_{i^z} \omega_i + M_{y_1}^c \Big/ J^{y_1} \\ \dot{\omega}_{z_1} = \left[ -(F_1 - F_3) \cdot d \right] - J_{i^z} \dot{\omega}_i - \omega_{x_1} \omega_{y_1} (J^{y_1} - J^{x_1}) + M_{z_1}^c \Big/ J^{z_1} \\ \dot{\varphi} = \omega_{x_1} - (\omega_{z_1} \cos \varphi + \omega_{y_1} \sin \varphi) \operatorname{tg} \theta \\ \dot{\theta} = \omega_{y_1} \cos \varphi - \omega_{z_1} \sin \varphi \\ \dot{\psi} = \frac{1}{\cos \theta} (\omega_{z_1} \cos \varphi + \omega_{y_1} \sin \varphi) \end{cases} \quad (6)$$

В этих уравнениях:  $m$  – масса тела;  $v_c^x, v_c^y, v_c^z$  – проекции скоростей центра масс трикоптера на оси  $OX, OY, OZ$ ;  $J_{TP}$  – сумма моментов инерции вращения вокруг оси винта;  $I_X, I_Y, I_Z$  – осевые моменты инерции;  $d$  – аэродинамическая постоянная;  $l_0$  – расстояние между центрами конвертоплана и пропеллера.

### 3 Системы автоматического управления

Рассмотрим структурную схему управления трикоптером, представленную на рис. 4. В состав системы управления входят микроконтроллер (микрокомпьютер), логический регулятор, объект управления и обратные связи.

Управляющее напряжение питания ( $U_i=5B$ ) от микроконтроллера, через бесколлекторные драйверы, подается на каждый из двигателей (ОУ1, ОУ2, ОУ3) и сервоприводы (ОУ4, ОУ5), используемые для изменения вектора тяги поворотного винта. Управление приводами трикоптера генерируется бортовой системой управления по соответствующим алгоритмам.

В качестве датчиков обратной связи используются: акселерометр, магнитометр и гироскоп. Акселерометр показывает изменение скорости движения трикоптера в пространстве, магнитометр – положение в пространстве, гироскоп определяет значение углов поворота  $\varphi, \psi, \theta$ . Полученные данные приходят на микроконтроллер где сравниваются с требуемыми значениями параметров, которые сохранены в постоянном запоминающем устройством (ПЗУ). Величина ошибки по

соответствующим обобщенным координатам (функции  $x^*$ ,  $y^*$ ,  $z^*$ ) и углам (функции  $\varphi^*$ ,  $\psi^*$ ,  $\theta^*$ ), определяемые разностью между фактическими и заданными значениями, поступают на вход регулятора, который вычисляет значения управляющих напряжений  $U_1-U_5$ , подаваемых на электродвигатель, в соответствии с принятой стратегией  $U_i=U_i(\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z, \Delta_\psi, \Delta_\theta, \Delta_\varphi)$ . При этом, важно обеспечить минимальное отклонение корпуса робота от заданной ориентации в пространстве.

Технически система "микроконтроллер и регулятор" может быть реализована на различной аппаратно-программной базе. Например, в качестве конкурентного решения может быть выбрана система РОБОКОН [В.Е.Павловский, В.В.Павловский 2013]. При необходимости реализации сложных вычислительных алгоритмов она может быть дополнена современным встраиваемым компьютером Raspberry Pi [Richard Grimmer 2014]. Он отличается малыми габаритами, низким энергопотреблением и большой вычислительной мощностью, может работать под ОС LINUX.

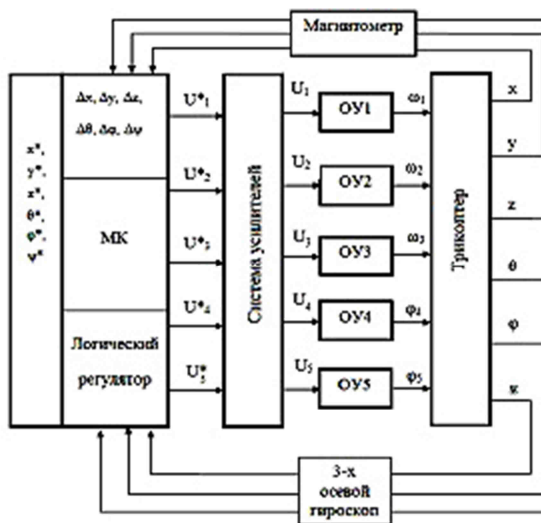


Рис 4. Структурная схема многоконтурной САУ

Заметим, в общем случае систему управления можно разделить на две части: первая - управление координатами центра масс трикоптера  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ , вторая – управление углами рысканья  $\psi$ , тангажа  $\theta$  и крена  $\varphi$ .

## 4 Моделирование процесса полёта конвертоплана по траектории

Траектория полёта конвертоплана состоит из трех этапов: 1 – взлёт, 2 – движение по траектории, 3 – посадка, соответствующие результаты численного моделирования приведены на рисунках 5 и 6.

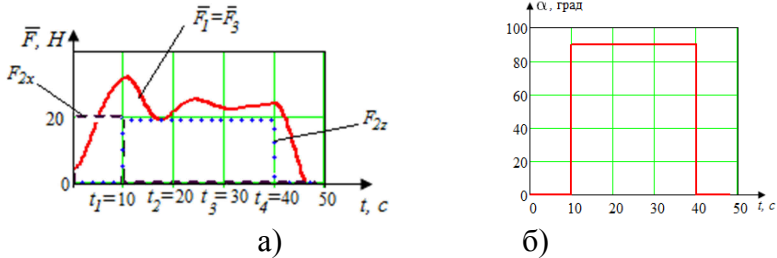


Рис. 5. Графики действия а - сил  $F_1$ - $F_3$  конвертоплана; б – угла поворота хвостового ротора от времени

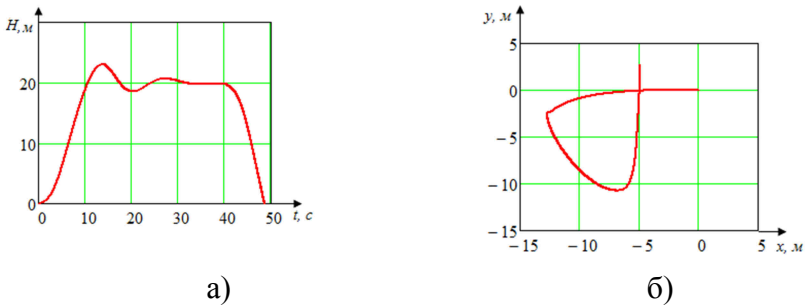


Рис.6. Графики режимов а - взлёта, висения и приземления (1 и 3 этапы); б – движения по траектории (2 этап) конвертоплана во времени

Моделирование показало ряд особенностей движения трикоптера. Так, установлено, что имеют место возникающие колебания в момент перехода системы из положения вертикального взлёта в положение горизонтального полёта, связанные с принятой стратегией интеллектуального управления.

## Выводы

Предложена расчетная схема и математическая модель пространственного движения конвертоплана, учитывающая гироскопические эффекты вращающихся винтов, массогабаритные свойства электроприводов, снабженных редукторами, кинематические

связи, свойства электродвигателей, алгоритмы выработки управляющих воздействий. Созданы инструментальные средства проектирования трикоптерных систем с изменяемым вектором тяги, позволяющие исследовать основные режимы и условия полёта аппарата с использованием различных методик стабилизации по трем углам  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\theta$ .

Трикоптеры могут эффективно дополнять группы известных квадрокоптерных аппаратов, например, в задачах контроля и инспекции территорий и других.

## Список литературы

- [Павловский и др 2014а] Павловский В.Е., Яцун С.Ф., Емельянова О.В., Савицкий А.В. Моделирование движения квадроскоптерного летящего робота Моделирование и исследование процессов управления квадрокоптером. Робототехника и техническая кибернетика: научно-техн. журнал / Санкт-Петербург., №4(5)/2014. -С.49-57.
- [Jatsun и др 2014а] Jatsyn S.F., Pavlovsky V.E., Emelyanova O.V., Savitsky A.S. . Mathematical model of the quadrotor type unmanned aerial vehicle with neurocontroller. Advances in Robotics, Mechatronics and Circuits: proceedings of the 18th International Conference on Circuits (CSCC'14) and proceedings of the 2014 International Conference on Mechatronics and Robotics, Structural Analysis (MEROSTA 2014), Santorini Island, Greece, 2014. - P. 46-50.
- [Яцун и др 2014б] Яцун С. Ф., Емельянова О.В., Савин А.И. Моделирование движения квадрокоптера при отклонении осей несущих винтов относительно корпуса // Вибрационные технологии, мехатроника и управляемые машины: сб. науч. ст.: в 2ч. Ч.1/ Юго-Зап. гос. ун-т. Курск, 2014.-С.329- 338.
- [Попов и др 2014] Попов Н.И., Емельянова О.В. Динамические особенности мониторинга воздушных линий электропередачи с помощью квадрокоптера // Современные проблемы науки и образования. – 2014. – № 2; URL: <http://www.science-education.ru/116-12773> (дата обращения: 16.04.2014).
- [Павловский и др 1990, б] Павловский М.А., Акинфеев Л.Ю., Бойчук О.Ф. Теоретическая механика. Динамика.-К.: Выща шк., 1990.-480 с.
- [В.Е.Павловский, В.В.Павловский 2013]. Масштабируемая система управления роботами РОБОКОН-1. // Информационно-измерительные и управляющие системы. М.: Издательство "Радиотехника" ISSN 2070-0814. №4, 2013, с.80-92.
- [Richard Grimmer 2014] Richard Grimmer. Raspberry Pi Robotics Projects. PACKT, 2014, 278 p.