УДК 681.51

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ БЕСПИЛОТНЫХ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ КВАДРОРОТАЦИОННОГО ТИПА

С.Ф. Яцун, Н.И Попов, О.В. Емельянова, А.И. Савин
(teormeh@inbox.ru)

ГОУ ВПО "Юго-Западный государственный университет", Курск, Россия

В работе рассмотрены вопросы математического моделирования движения квадрокоптера, с учетом массогабаритных свойств четырёх электроприводов, снабженных редуктором. Приведена расчетная схема и составлены дифференциальные уравнения на основе общих теорем динамики, которые описывают взаимосвязанные электромагнитные и механические процессы в электромеханической системе приводов винтов квадрокоптера. Предложенные нелинейные дифференциальные уравнения решаются совместно с кинематическими соотношениями, выражающие проекции угловой скорости тела на оси связанной системы координат через угловые скорости углов крена, тангажа и рысканья.

Введение

Квадрокоптер – это летательный аппарат с четырьмя несущими винтами, вращающимися диагонально в противоположных направлениях. Он обладает рядом преимуществ по сравнению с беспилотными аналогами самолётного типа, таких как: возможность вертикального взлёта и посадки, маневренность в полёте, малая взлетная масса при существенной массе полезной нагрузки, надежность и компактность, Благодаря простоте конструкции квадрокоптеры часто используются в любительском моделировании, удобны для недорогой аэрофото- и киносъёмки — громоздкая камера вынесена из зоны действия винтов.

Для изучения основных закономерностей движения квадрокоптера, особенностей системы управления необходимой для стабилизации аппарата в заданном положении и движении центра масс по заданной траектории, необходимо составить математическую модель, описывающую пространственное движение летающего робота.

Математическая модель квадрокоптера

Будем рассматривать квадрокоптер как электромеханическую систему корпус которой можно моделировать твердым телом с 6-ю степенями свободы [Емельянова и др 2013a], [Емельянова и др 2013b], . [Попов и др 2014a], [Попов и др 2014b], [Bresciani, 2008], [Tahar, 2011].

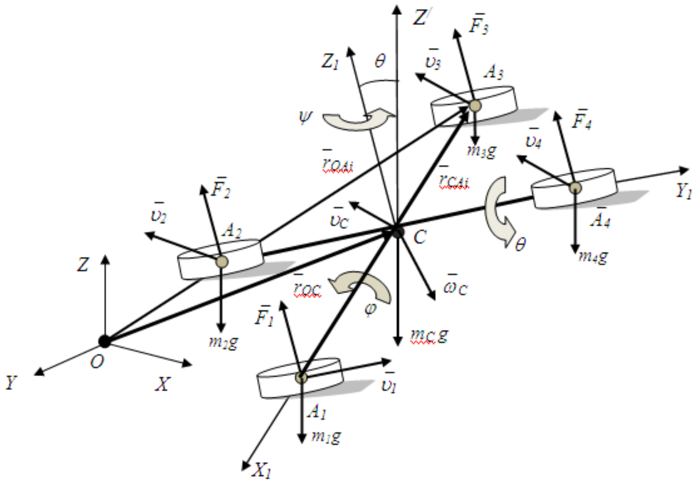

Рис. 1. Расчетная схема квадрокоптера

Пусть положение центра масс квадрокоптера C совпадает с началом подвижной системы координат $CX_1Y_1Z_1$, а в неподвижной декартовой системе координат описывается координатами X, Y, Z (рис.1).

Ориентацию в пространстве задают углы Эйлера-Крылова, которые обычно применяются в авиационной технике при описании движения аппарата и составляют так называемые углы: крена, тангажа и рысканья [Павловский и др 1990]. Они соответствуют следующей последовательности поворотов:

1. Поворот на угол ψ относительно вертикальной оси OZ ($R\ z,\psi$) — рыскание.

2. Поворот на угол θ относительно главной поперечной оси инерции OY ($R\ y,\theta$) — тангаж.

3. Поворот на угол φ вокруг продольной оси OX ($R\ x,\varphi$) — крен.

При полёте квадрокоптера на него действуют аэродинамические силы несущих винтов $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$, $\bar{F}_3$, $\bar{F}_4$, приложенные к центрам масс роторов A_1, A_2, A_3, A_4, причем силы $\overline{F}_i$ параллельны оси CZ_1. Силы тяжести корпуса $m_C g$ и роторов винтов $m_i g$ приложены в точках C и A_i соответственно (рис. 1) [Попов и др 2014a], [Попов и др 2014b].

Положение центра масс квадрокоптера определяет радиус- вектор $r_{OC}=[X,Y,Z]^T$.

Условимся в дальнейшем векторы в системы координат $OXYZ$ и $CX_1Y_1Z_1$ обозначать символами $^{(0)}$ и $^{(1)}$ соответственно. Тогда, например, проекции векторов сил в $^{(0)}$ системе координат можно выразить через проекции сил в $^{(1)}$ системе координат с помощью выражения:

$$F_i^{(0)} = T_{10} \cdot F_i^{(1)}, \tag{1}$$

где T_{10} - матрица перехода из $^{(1)}$ в $^{(0)}$ систему координат.

Матрица T_{10} получается путем перемножения трёх основных матриц вращения и имеет следующий вид [Bresciani, 2008], [Tahar, 2011], [Павловский и др 1990]:

$$T_{10} = (\psi, \theta, \varphi) = R(z, \psi) \times R(y,\theta) \times R(x,\varphi)=$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\psi\cos\theta & \cos\psi\sin\varphi\sin\theta - \cos\varphi\sin\psi & \sin\psi\sin\varphi + \cos\psi\cos\varphi\sin\theta \\ \sin\psi\cos\theta & \cos\psi\cos\varphi + \sin\psi\sin\varphi\sin\theta & \cos\varphi\sin\psi\sin\theta - \cos\psi\sin\varphi \\ -\sin\theta & \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi\cos\theta \end{bmatrix} \tag{2}$$

Запишем очевидное равенство:

$$r_{OA_i}^{(0)} = \bar{r}_{OC}^{(0)} + \bar{r}_{CA_i}^{(0)}, \tag{3}$$

где

$$\bar{r}_{CA_i}^{(0)} = T_{10} \cdot \bar{r}_{CA_i}^{(1)}. \tag{4}$$

Векторы $\bar{r}_{CA_i}^{(1)}$ для точек A_i имеют вид:

$$\bar{r}_{CA1}^{(1)} = \begin{vmatrix} l \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \bar{r}_{CA_2}^{(1)} = \begin{vmatrix} 0 \\ -l \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \bar{r}_{CA_3}^{(1)} = \begin{vmatrix} -l \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \bar{r}_{CA_i}^{(1)} = \begin{vmatrix} 0 \\ l \\ 0 \end{vmatrix}, \tag{5}$$

где l – расстояние от центра масс квадрокоптера C до центра масс роторов A_i.

Скорости точек A_i определим, продифференцировав равенство (3) по времени:

$$\upsilon_{A_i}^{(0)} = \frac{\bar{r}_{OA_i}^{(0)}}{dt} = \frac{\bar{r}_{OC}^{(0)}}{dt} + \frac{\bar{r}_{CA_i}^{(0)}}{dt} \tag{6}$$

Производная по времени от равенства (4) даёт:

$$\bar{\upsilon}_{A_i}^{(0)} = \bar{\upsilon}_{\tilde{N}}^{(0)} + \dot{T}_{10} \cdot \bar{r}_{CA_i}^{(1)} \tag{7}$$

где $\bar{\upsilon}_{\tilde{N}}^{(0)} = \bar{i}\dot{X} + \bar{j}\dot{Y} + \bar{k}\dot{Z}$ - скорость центра масс квадрокоптера.

Определим количество движения i-ой массы по формуле:

$$\bar{q}_i = m_i \bar{\upsilon}_{A_i} = m_i(\bar{\upsilon}_C + \dot{T}_{10} \cdot \bar{r}_{CA_i}^{(1)}) \tag{8}$$

Изменение количества движения найдём из выражения:

$$\frac{d\bar{q}_i}{dt} = m_i\left(\frac{d\bar{\upsilon}_C}{dt} + \ddot{T}_{10} \cdot \bar{r}_{CA_i}^{(1)}\right) = T_{10}\bar{F}_i^{(1)} \tag{9}$$

Вектор количества движения рассматриваемой системы, состоящей из корпуса и 4 винтов, определим по формуле:

$$\bar{Q} = m_C\bar{\upsilon}_C + \sum_{i=1}^{4} m_{Ai}\bar{\upsilon}_{Ai} \tag{10}$$

Запишем теорему об изменении количества движения механической системы в дифференциальной форме:

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = m_C\frac{d\bar{\upsilon}_C}{dt} + \sum m_i\left(\frac{d\bar{\upsilon}_C}{dt} + \ddot{T}_{10} \cdot \bar{r}_{CA_i}^{(1)}\right) = (m_C + \sum m_i)\frac{d\bar{\upsilon}_C}{dt} + \ddot{T}_{10}\sum m_i\bar{r}_{CA_i}^{(1)} = T_{10}\sum\bar{F}_i^{(1)} \tag{11}$$

После соответствующих преобразований получим систему дифференциальных уравнений, описывающих движение центра масс рассматриваемой системы (квадрокоптера).

$$\begin{cases} m\ddot{X} = (\sin\psi\sin\varphi + \cos\psi\cos\varphi\sin\theta)\cdot\sum F_i^{(1)} \\ m\ddot{Y} = (\cos\varphi\sin\psi\sin\theta - \cos\psi\sin)\cdot\sum F_i^{(1)} \\ m\ddot{Z} = \cos\varphi\cos\theta\cdot\sum F_i^{(1)} - mg \end{cases} \tag{12}$$

где $m = m_C + m_{\mathrm{i}}$ – общая масса квадрокоптера,

Рассмотрим угловые скорости вращения роторов квадрокоптера в локальной системе координат $CX_1Y_1Z_1$ (рис.2). Для этого введем систему координат $A_ix_iy_iz_i$, которая совпадает с центром масс m_i роторов.

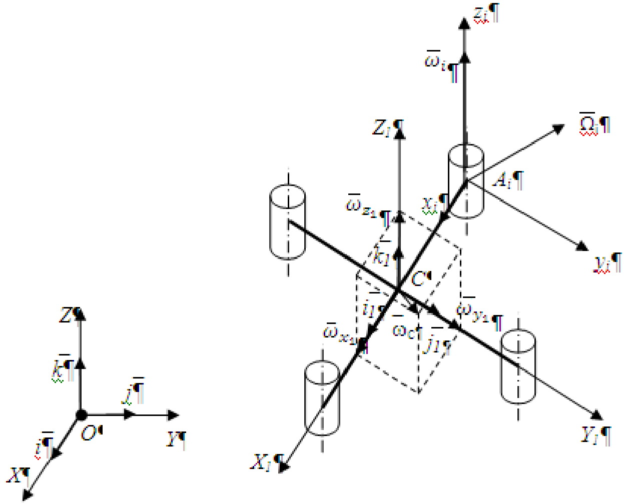

Рис.2. Расчетная схема определения кинетического момента квадрокоптера

Вектор абсолютной угловой скорости вращения i-ого ротора определим по формуле:

$$\overline{\Omega}_i = \overline{\omega}_i + \overline{\omega}_C, \quad i = 1..4; \tag{13}$$

$$\overline{\omega}_i = \bar{i}_i\omega_{ix} + \bar{j}_i\omega_{iy} + \bar{k}_i\omega_{iz};$$

$$\overline{\omega}_C = \bar{i}_1\omega_{CX_1} + \bar{j}_1\omega_{CY_1} + \bar{k}_1\omega_{CZ_1}, \tag{14}$$

где i_1, j_1, k_1 и i_i, j_i, k_i - единичные векторы системы координат $CX_1Y_1Z_1$ и $A_ix_iy_iz_i$, $\overline{\Omega}_i$ - абсолютная угловая скорость вращения i-ого ротора в системе координат $CX_1Y_1Z_1$; $\overline{\omega}_C$, $\overline{\omega}_i$ - векторы угловых скоростей вращения корпуса и i-ого ротора в системе координат $CX_1Y_1Z_1$ и $A_ix_iy_iz_i$ представим в виде:

$$\overline{\omega}_C = \begin{vmatrix} \omega_{X_1} \\ \omega_{Y_1} \\ \omega_{Z_1} \end{vmatrix}, \qquad \overline{\omega}_i = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_i \end{vmatrix}, \qquad \overline{\Omega}_i = \begin{vmatrix} \omega_{x_1} \\ \omega_{y_1} \\ \omega_i + \omega_{Z_1} \end{vmatrix} \tag{15}$$

или

$$\overline{\Omega}_i = \bar{i}_1\Omega_x + \bar{j}_1\Omega_y + \bar{k}_1\Omega_z \tag{16}$$

Определим момент количества движения ротора в системе координат $A_ix_iy_iz_i$

$$\overline{L}_{iA_i} = I_{Ai}\overline{\Omega}_i, \tag{17}$$

где $I_{iA_i} = \begin{vmatrix} J_{Ai}^x & 0 & 0 \\ 0 & J_{Ai}^y & 0 \\ 0 & 0 & J_{Ai}^z \end{vmatrix}$ - тензор инерции ротора.

Тогда кинетический момент равен:

$$\overline{L}_{iA_i} = \begin{vmatrix} J_{Ai}^x & 0 & 0 \\ 0 & J_{Ai}^y & 0 \\ 0 & 0 & J_{Ai}^z \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \omega_{X_1} \\ \omega_{Y_1} \\ \omega_i + \omega_{Z_1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} J_{Ai}^x\omega_{X_1} \\ J_{Ai}^y\omega_{Y_1} \\ J_{Ai}^z\left(\omega_i + \omega_{Z_1}\right) \end{vmatrix} \tag{18}$$

Определим момент количества движения в системы:

$$\overline{L} = \overline{L}_C + \sum\overline{L}_i, \tag{19}$$

где $\overline{L}_C = I_C\overline{\omega}_C$ - кинетический момент корпуса относительно центра масс квадрокоптера;

$\overline{L}_i = I_i\overline{\Omega}_i = (I_{A_i} + ml^2)\,\overline{\Omega}_i$ - кинетический момент i-го ротора относительно центра масс квадрокоптера в системе координат $CX_1Y_1Z_1$.

Тензоры инерции корпуса I_C и i-го ротора I_i с учетом того, что главные оси инерции механической системы являются главными центральными осями инерции равны:

$$I_C = \begin{vmatrix} J_C^{X_1} & 0 & 0 \\ 0 & J_C^{Y_1} & 0 \\ 0 & 0 & J_C^{Z_1} \end{vmatrix}; \qquad I_i = \begin{vmatrix} J_{A_i}^{x} + m_i l^2 & 0 & 0 \\ 0 & J_{Ai}^{y} + m_i l^2 & 0 \\ 0 & 0 & J_{Ai}^{z} + m_i l^2 \end{vmatrix} \tag{20}$$

Тогда:

$$\overline{L}_C = \begin{vmatrix} J_C^{X_1} & 0 & 0 \\ 0 & J_C^{Y_1} & 0 \\ 0 & 0 & J_{Ai}^{Z_1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \omega_{X_1} \\ \omega_{Y_1} \\ \omega_{Z_1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} J_C^{X_1}\omega_{X_1} \\ J_C^{Y_1}\omega_{Y_1} \\ J_C^{Z_1}\omega_{Z_1} \end{vmatrix} \tag{21}$$

$$\overline{L}_i = \begin{vmatrix} J_{A_i}^{x} + m_i l^2 & 0 & 0 \\ 0 & J_{Ai}^{y} + m_i l^2 & 0 \\ 0 & 0 & J_{Ai}^{z} + m_i l^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \omega_{X_1} \\ \omega_{Y_1} \\ \omega_i + \omega_{Z_1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (J_{A_i}^{x} + m_i l^2)\omega_{X_1} \\ (J_{Ai}^{y} + m_i l^2)\omega_{Y_1} \\ (J_{Ai}^{z} + m_i l^2)(\omega_i + \omega_{Z_1}) \end{vmatrix} \tag{22}$$

С учетом (21), (22) выражение (19) будет иметь вид:

$$L = \begin{vmatrix} (J_C^{X_1} + \sum J_{A_i}^{x} + \sum m_i l^2)\,\omega_{X_1} \\ (J_C^{Y_1} + \sum J_{Ai}^{y} + \sum m_i l^2)\,\omega_{Y_1} \\ (J_C^{Z_1} + \sum J_{Ai}^{z} + \sum m_i l^2)\,\omega_{Z_1} + (\sum J_{Ai}^{z} + \sum m_i l^2)\,\omega_i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} J^{X_1}\omega_{X_1} \\ J^{Y_1}\omega_{Y_1} \\ J^{Z_1}\omega_{Z_1} + \sum J_i^z \omega_i \end{vmatrix}, \tag{23}$$

где $J^{X_1} = J_C^{X_1} + \sum J_{A_i}^{x} + \sum m_i l^2$, $J^{Y_1} = J_C^{Y_1} + \sum J_{Ai}^{y} + \sum m_i l^2$, $J^{Z_1} = J_C^{Z_1} + \sum J_{Ai}^{z} + \sum m_i l^2$, $\sum J_i^z = \sum J_{Ai}^z + \sum m_i l^2$ - приведенные осевые моменты инерции.

Для получения системы дифференциальных уравнений, описывающих вращение рассматриваемой системы, применим теорему об изменении кинетического момента механической системы [Павловский и др 1990]:

$$\frac{d\overline{L}}{dt} = \frac{d\overline{L}}{dt} + \left(\overline{\omega}_C \times \overline{L}\right) = \sum \overline{M}_C^e \tag{24}$$

$$\frac{d\overline{L}}{dt} = \begin{vmatrix} J^{X_1}\dot{\omega}_{X_1} + \omega_{Y_1}\omega_{Z_1}\left(J_i^{Z_1} - J^{Y_1}\right) + \omega_{Y_1}\sum J_i^z\omega_i \\ J^{Y_1}\dot{\omega}_{Y_1} + \omega_{X_1}\omega_{Z_1}\left(J^{X_1} - J_i^{Z_1}\right) - \omega_{X_1}\sum J_i^z\omega_i \\ J^{Z_1}\dot{\omega}_{Z_1} + J_i^z\dot{\omega}_i + \omega_{X_1}\omega_{Y_1}\left(J^{Y_1} - J^{X_1}\right) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} M_{X_1}^e \\ M_{Y_1}^e \\ M_{Z_1}^e \end{vmatrix} \tag{25}$$

Тогда с учётом (12) и (25) система дифференциальных уравнений, описывающих движение квадрокоптера, может быть представлена в виде:

$$\begin{cases} m\ddot{X} = (\sin\psi\sin\varphi + \cos\psi\cos\varphi\sin\theta)\cdot\sum F_i \\ m\ddot{Y} = (\cos\varphi\sin\psi\sin\theta - \cos\psi\sin)\cdot\sum F_i \\ m\ddot{Z} = \cos\varphi\cos\theta\cdot\sum F_i - mg \\ J^{X_1}\dot{\omega}_{X_1} + \omega_{Y_1}\omega_{Z_1}\left(J_i^{Z_1} - J^{Y_1}\right) + \omega_{Y_1}\sum J_i^z\omega_i = M_{X_1}^e \\ J^{Y_1}\dot{\omega}_{Y_1} + \omega_{X_1}\omega_{Z_1}\left(J^{X_1} - J_i^{Z_1}\right) - \omega_{X_1}\sum J_i^z\omega_i = M_{Y_1}^e \\ J^{Z_1}\dot{\omega}_{Z_1} + J_i^z\dot{\omega}_i + \omega_{X_1}\omega_{Y_1}\left(J^{Y_1} - J^{X_1}\right) = M_{Z_1}^e \end{cases} \tag{26}$$

Систему уравнений (26) необходимо решать совместно с кинематическими соотношениями, выражающими связь проекций угловой скорости аппарата и углов крена, тангажа и рысканья:

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \omega_{\tilde{O}_1} - \left(\omega_{Z_1} \cos\varphi - \omega_{Y_1} \sin\varphi\right) ctg\theta \\ \dot{\theta} = \omega_{Z_1} \sin\varphi + \omega_{Y_1} \cos\varphi \\ \dot{\psi} = \dfrac{1}{\cos\theta}\left(\omega_{Z_1} \cos\varphi - \omega_{Y_1} \sin\varphi\right) \end{cases} . \qquad (27)$$

Связь между угловой скоростью пропеллеров и величиной управляющих напряжений, поступающих на электродвигатели запишем в виде [Емельянова и др 2013a], [Емельянова и др 2013b]:

$$\dot{\Omega}_i = \frac{-\dfrac{\tilde{n}_E \tilde{n}_M}{R}\eta N^2 \Omega_i - d\,\Omega_i^2 + \dfrac{\tilde{n}_M}{R}\eta N\, u_i(x, y, z, \varphi, \theta, \psi)}{\left(J_p + \eta N^2 J_M\right)}, \quad i = 1-4 \qquad (29)$$

где K_M – коэффициент пропорциональности, называемый постоянной момента электродвигателя; $N=\omega_i/\Omega_i$ – передаточное отношение редуктора, равное скорости электродвигателя ω_i разделить на скорость пропеллера Ω_i; η-коэффициент эффективности (кпд), который связывает механическую энергию оси двигателя и пропеллера; . J_P, J_M – момент инерции ротора вокруг оси винта и оси мотора соответственно; c_E , c_{Mi} - коэффициенты пропорциональности, называемые соответственно постоянной ЭДС двигателя и момента электродвигателя; d - аэродинамическая постоянная; R - активное сопротивление обмотки ротора.

Особый интерес представляет собой выбор стратегии управления, которая обеспечивает движение объекта по заданной траектории с заданной точностью и быстродействием и описывается функцией: $u_i = u_i(x, y, z, \varphi, \theta, \psi)$.

Пропорциональное управление по отклонению можно представить в виде:

$$u_i=u_i(x,y,z, \varphi, \theta,\psi)= u_{0i} \pm\Delta x k_x \pm \Delta y k_y \pm \Delta z k_z \pm\Delta\varphi k_\varphi \pm\Delta\theta k_\theta \pm \Delta\psi k_\psi . \qquad (30)$$

где u_{0i} - постоянное напряжение питания; k_j - коэффициенты приращения; Δx, Δy, Δz, $\Delta\psi$, $\Delta\theta$, $\Delta\varphi$ - значения ошибок.

Для определения желаемой траектории движения и ориентации объекта в пространстве необходимо знать зависимость координат центра масс квадрокоптера от времени. Решение системы нелинейных дифференциальных уравнений (26), (27), (29), (30) осуществляется путем численного интегрирования, что позволяет найти зависимости $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, $\varphi(t)$, $\theta(t)$, $\psi(t)$ и провести моделирования движения летающего робота.

Выводы

Предложена расчетная схема и математическая модель пространственного движения квадрокоптера, учитывающая гироскопические эффекты, вращающиеся винты, массогабаритные свойства четырёх электроприводов, снабженных редуктором, кинематические связи, свойства электродвигателей, алгоритмы выработки управляющих воздействий.

В дальнейшем планируется создать адаптивный алгоритм, который заключается в использовании различных методик стабилизации по трем углам ψ, θ, φ для различных режимов и условий полёта. Решить задачу оптимального синтеза по критерию быстродействия при перемещении квадрокоптера из одной точки в другую. Выбрать области рациональных параметров, определяющих оптимальную работу приводов квадрокоптера в различных режимах для ПИД и логического регулятора.

Список литературы

[Емельянова и др 2013a] Емельянова О.В., Попов Н. И., Яцун С. Ф. Моделирование движения квадроротационного летающего робота Актуальные вопросы науки. Материалы VIII Международной научно-практической конференции. Москва, Спутник+.2013.с.6-8.

[Емельянова и др 2013b] Емельянова О.В., Попов Н. И., Яцун С. Ф. Моделирование движения квадрокоптера в пространстве // Авиакосмические технологии (АКТ-2013). Труды XIV Всероссийской научно-технической конференции и школы молодых ученых, аспирантов и студентов. – Воронеж: ООО Фирма «Элист», 2013. –С.131-138.

[Попов и др 2014a] Попов Н.И., Емельянова О.В., Яцун С.Ф., Савин А.И. Исследование колебаний квадрокоптера при внешних периодических воздействиях // Фундаментальные исследования. – 2014. – № 1 . – стр. 28-32.

[Попов и др 2014b] Попов Н.И., Емельянова О.В. Динамические особенности мониторинга воздушных линий электропередачи с помощью квадрокоптера // Современные проблемы науки и образования. – 2014. – № 2; URL: http://www.science-education.ru/116-12773 (дата обращения: 16.04.2014).

[Павловский и др 1990] Павловский М.А., Акинфеев Л.Ю., Бойчук О.Ф. Теоретическая механика. Динамика.-К.: Выща шк., 1990.-480 с.

[Bresciani, 2008] T.Bresciani. Modeling, identification and control of a quadrotor helicopter. Master's thesis, Department of Automatic control, Lund University, October 2008, p.170.

[Tahar, 2011] M.Tahar, K.M.Zemalache, A. Omari Control of under-actuated X4-flyer using indegral Backstepping controller. Przeglad elektrotechniczny (Electrical review), ISSN 0033-2097, R.87 NR 10/2011, pages251-256.